2.1 Sea

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] - \delta[n-3] \text{ y } h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$$

Calcule y haga la gráfica de cada una de las siguientes convoluciones:

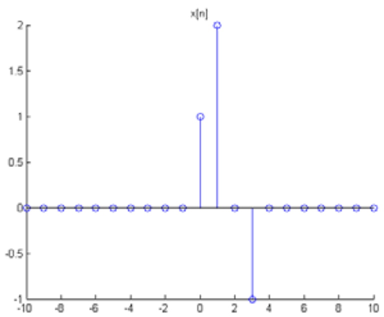
a) $y_1[n] = x[n] * h[n]$ b) $y_2[n] = x[n+2] * h[n]$

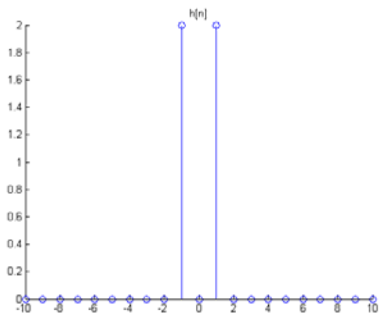
c) $y_3[n] = x[n] * h[n+2]$

Sol:

a) $y_1[n] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$	
d) $y_2[n] = y_1[n+2]$	c) $y_3[n] = y_2[n] = y_1[n+2]$

Resolución:





Apartado a) A partir de la expresión suma de la convolución tenemos:

$$y_1[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (1)$$

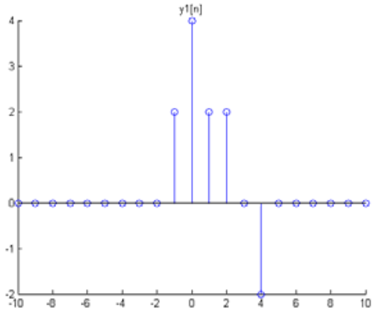
Si observamos sólo tiene dos muestras distintas de cero (muestras -1 y 1) de amplitud 2, con lo que:

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] = h[-1]x[n+1] + h[1]x[n-1]$$
$$= 2x[n+1] + 2x[n-1]$$

De esta forma

$$y_1[n] = 2x[n+1] + 2x[n-1] = 2\delta[n+1] + 4\delta[n] - 2\delta[n-2] +$$
$$+ 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] - 2\delta[n-4] =$$
$$= 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4]$$

Cuya gráfica es:



Apartado b)

$$y_2[n] = x[n+2] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+2-k] \quad (2)$$

Si tenemos en cuenta (1) y desplazamos dos muestras a la izquierda tenemos

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \rightarrow y_1[n+2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n+2-k]$$

Expresión que coincide con (2), con lo que $y_1[n] = y_2[n+2]$

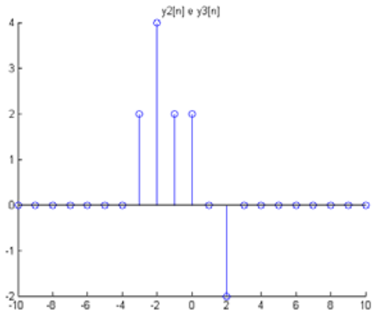
Apartado c) Procediendo de idéntica forma y por la propiedad conmutativa de la suma de convolución $y_1[n]$ puede expresarse como,

$$y_1[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

$$y_1[n+2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n+2-k]$$

De esta forma $y_3[n]$ puede ser expresada

$$y_3[n] = x[n] * h[n+2] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n+2-k] = y_1[n+2]$$



2.2 .Considere la señal

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \{u[n+3] - u[n-10]\}$$

Exprese *A* y *B* en términos de *n* de manera que se cumplan las siguientes ecuaciones.

$$h[n-k] = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k-1} & A \le k \le B \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases}$$

Sol:

$$\boxed{A = n - 9 \quad B = n + 3}$$

Resolución:

Resolución: Si observamos la señal debido a los escalones se inicia en -3 y termina en 9. Por tanto si evaluamos $h[k]$ será distinto de cero en el intervalo $-3 \le k \le 9$.
De esta forma la señal pedida $h[n-k]$ será distinta de cero en:

$$-3 \le n - k \le 9$$

Y despejando *k*

$$-3 \le n - k \le 9 \rightarrow -3 - n \le -k \le 9 - n \rightarrow n - 9 \le k \le n + 3$$

Con lo que $A = n - 9 \quad B = n + 3$

2.3 Considere una entrada $x[n]$ y una respuesta al impulso unitario $h[n]$ dada por

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$
$$h[n] = u[n+2]$$

Determine y dibuje la salida $y[n] = x[n] * h[n]$

Sol:

$$y[n] = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] u[n]$$

Resolución:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u[k-2] u[n-k+2] =$$

$$= \left[u[k-2] = \begin{cases} 1 & k \ge 2 \\ 0 & k < 2 \end{cases}\right] = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} u[n-k+2] =$$

$$= \left[u[n-k+2] = \begin{cases} 1 & n-k \ge -2 \quad k \le n+2 \\ 0 & n-k < -2 \quad k \le n+2 \end{cases}\right] = \sum_{k=2}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} =$$

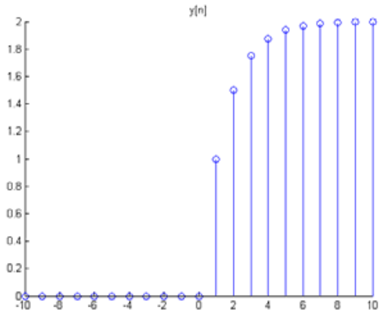
$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2-2} \left(\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Aquí debes tener en cuenta que este resultado es válido para el intervalo $n \ge 0$. ¿Por qué? El porqué es debido a, por un lado tenemos que debido a $u[k-2]$ *k* debe ser mayor e igual que 2 y por $u[n-k+2]$, *k* debe ser menor e igual que $n+2$, entonces.

$$\left.\begin{matrix} k \ge 2 \\ k \le n+2 \end{matrix}\right\} \rightarrow n + 2 \ge k \ge 2 \rightarrow n + 2 \ge 2 \rightarrow n \ge 0$$

Con lo que, la solución total es:

$$y[n]=\begin{cases}2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}=2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u[n]$$



2.8 Determine y bosqueje la convolución de las siguientes dos señales

$$x(t)=\begin{cases}t+1 & 0\leq t\leq 1\\ 2-t & 1<t\leq 2\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}$$

$$h(t)=\delta(t+2)+2\delta(t+1)$$

Solución:

$$\boxed{y(t)=\begin{cases}t+3 & -2\leq t\leq -1\\ t+4 & -1<t\leq 0\\ 2-2t & 0<t\leq 1\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}}$$

Resolución:

Se trata de convolucionar con impulsos. Si recuerdas al convolucionar con deltas se verifica: $x(t)*\ \delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

Por tanto $y(t)=x(t)*\ h(t)=x(t)*\ [\delta(t+2)+2\delta(t+1)]=x(t+2)+2x(t+1)$

De esta forma

$$x(t+2)=\begin{cases}t+2+1 & 0\leq t+2\leq 1\\ 2-(t+2) & 1<t+2\leq 2\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}=\begin{cases}t+3 & -2\leq t\leq -1\\ -t & -1<t\leq 0\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}$$

$$2x(t+1)=2\begin{cases}t+1+1 & 0\leq t+1\leq 1\\ 2-(t+1) & 1<t+1\leq 2\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}=\begin{cases}2t+4 & -1\leq t\leq 0\\ -2t+2 & 0<t\leq 1\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}$$

Si sumamos

$$y(t)=\begin{cases}t+3 & -2\leq t\leq -1\\ 2t+4-t & -1<t\leq 0\\ 2-2t & 0<t\leq 1\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}=\begin{cases}t+3 & -2\leq t\leq -1\\ t+4 & -1<t\leq 0\\ 2-2t & 0<t\leq 1\\ 0 & \text{con otro valor}\end{cases}$$

2.9 Sea

$$h(t)=e^{2t}u(-t+4)+e^{-2t}u(t-5)$$

Determine *A* y *B* tales que

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)} & \tau<A \\ 0 & A<\tau<B \\ e^{2(t-\tau)} & B<\tau \end{cases}$$

Sol.

$A=t-5 \quad B=t-4$

Resolución:

$$h(\tau)=e^{2\tau}u(-\tau+4)+e^{-2\tau}u(\tau-5)=\begin{cases} e^{-2\tau} & \tau>5 \\ e^{2\tau} & \tau<4 \\ 0 & 4<\tau<5 \end{cases}$$

Por tanto

$$h(t-\tau)=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)} & t-\tau>5 \\ e^{2(t-\tau)} & t-\tau<4 \\ 0 & 4<t-\tau<5 \end{cases}=\begin{cases} e^{-2(t-\tau)} & \tau<t-5 \\ e^{-2(t-\tau)} & t-4<\tau \\ 0 & (t-5)<\tau<(t-4) \end{cases}$$

Con lo que:

$A=t-5 \quad B=t-4$

2.11 Sea

$$x(t)=u(t-3)-u(t-5)$$
$$h(t)=e^{-3t}u(t)$$

a) Calcule $y(t)=x(t)*h(t)$

b) Calcule $g(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}*h(t)$

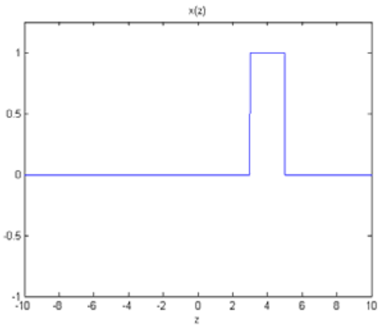
c) ¿Cómo está relacionada $g(t)$ **con** $y(t)$**?**

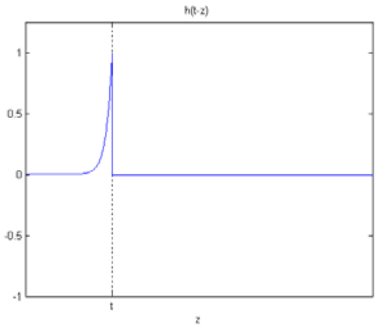
Sol:

a) $y(t)=\begin{cases} 0 & -\infty<t\le 3 \\ \dfrac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3<t\le 5 \\ \dfrac{(1-e^{-6})e^{-3(t-5)}}{3} & 5<t\le\infty \end{cases}$	
b) $g(t)=e^{-3(t-3)}u(t-3)-e^{-3(t-5)}u(t-5)$	c) $g(t)=\dfrac{dy(t)}{dt}$

Resolución:

Resolvamos gráficamente, dibujemos $x[k]$ y $h[k]$





Para evaluar la salida resolvemos la integral de convolución, barriendo todo el eje tiempos

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau$$

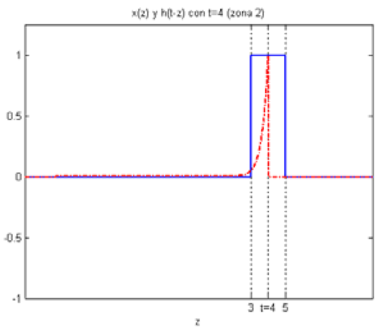
Si observamos tenemos diferentes zonas para evaluar la integral.

Zona 1: Cuando $t \leq 3$

No hay producto común y la salida es cero $y_{zona1}(t) = 0$

Zona 2: Cuando $t > 3$ y $t \leq 5$

En este caso

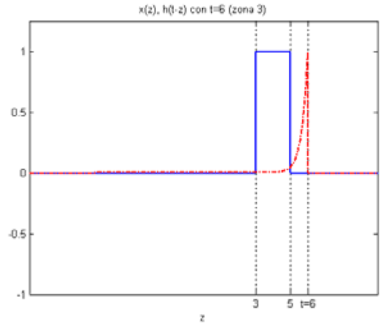


Con lo que

$$y_{zona2}(t) = \int_{3}^{t} e^{-3(t-\tau)} d\tau = \left.\frac{e^{-3(t-\tau)}}{3}\right|_{3}^{t} = \frac{1-e^{-3(t-3)}}{3}$$

Zona 3: Cuando $t > 5$

Estamos en la situación de la figura, debes tener en cuenta que la exponencial es infinita y por tanto no consideres cero la gráfica de línea de puntos.



De esta forma

$$y_{zona\,3}(t)=\int_3^5 e^{-3(t-\tau)}d\tau=\left.\frac{e^{-3(t-\tau)}}{3}\right|_3^5=\frac{e^{-3(t-5)}-e^{-3(t-3)}}{3}=\frac{e^{-3(t-5)}\left(1-e^{-6}\right)}{3}$$

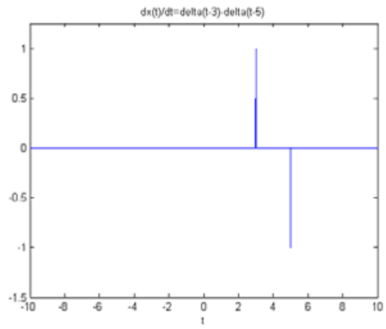
Por tanto

$$\text{a)}y(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ \dfrac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3<t\le 5\\ \dfrac{\left(1-e^{-6}\right)e^{-3(t-5)}}{3} & 5<t\le\infty\end{cases}$$

Apartado b)

Al derivar la señal de entrada (resta de escalones) y tal como vimos en el módulo 1, la derivada del escalón es la delta la derivada es:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\delta(t-3)-\delta(t-5)$$



Por tanto al ser la convolución con deltas (propiedad desplazamiento)

$$g(t)=h(t-3)-h(t-5)=e^{-3(t-3)}u(t-3)-e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

Apartado c) Es decir, estamos interesados a ver que le sucede a la convolución cuando convolucionamos con la derivada.

Derivemos el resultado del apartado a)

$$y(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ \dfrac{1-e^{-3(t-3)}}{3} & 3<t\le 5 \\ \dfrac{\left(1-e^{-6}\right)e^{-3(t-5)}}{3} & 5<t\le\infty\end{cases}\rightarrow$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ \dfrac{3e^{-3(t-3)}}{3} & 3<t\le 5\\ \dfrac{-3\left(1-e^{-6}\right)e^{-3(t-5)}}{3} & 5<t\le\infty\end{cases}=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ e^{-3(t-3)} & 3<t\le 5\\ \left(e^{-6}-1\right)e^{-3(t-5)} & 5<t\le\infty\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0 & -\infty<t\le 3\\ e^{-3(t-3)} & 3<t\le 5\\ e^{-3(t-3)}-e^{-3(t-5)} & 5<t\le\infty\end{cases}=e^{-3(t-3)}u(t-3)-e^{-3(t-5)}u(t-5)$$

Con lo que la salida es la derivada, por tanto $g(t)=\dfrac{dx(t)}{dt}$ (denominada propiedad de la derivación de la convolución)

2.14 ¿Cuáles de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?

a) $h_1(t)=e^{-(1-2j)t}u(t)$ **b)** $h_2(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)$

Sol: Las dos.

Resolución:
La condición para que un sistema LTI sea estable viene determinada por la convergencia o no del área del módulo de la respuesta impulsional $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt$

Apartado a)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_1(t)|dt=\int_0^{\infty}\left|e^{-(1-2j)t}\right|dt=\int_0^{\infty}\left|e^{-t}e^{-2jt}\right|dt=\int_0^{\infty}\left|e^{-t}\right|\left|e^{-2jt}\right|dt=\int_0^{\infty}e^{-t}dt=1$$

Con lo que es estable.

Apartado b)

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t)|dt=\int_0^{\infty}\left|e^{-t}\cos(2t)\right|dt=\int_0^{\infty}e^{-t}\underbrace{|\cos(2t)|}_{(1)}dt\le\int_0^{\infty}e^{-t}dt\le 1$$

(1) Al ser este módulo menor o igual, puede evaluar el área máxima que corresponde a módulo 1, y observando que está converge, por tanto también esta respuesta impulsional corresponde a un sistema estable.

2.15 ¿Cuál de las siguientes respuestas al impulso corresponden a sistemas estables LTI?.

a) $h_1[n] = n\,cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)u[n]$ **b)** $h_1[n] = 3^n\,u[-n+10]$

Sol: La respuesta al impulso del apartado b)

Resolución:

Debemos determinar si la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h[n]|$ converge.

Apartado a)

$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_1[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} n\left|cos\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} n$ Por tanto no converge, ya que crece a medida se incrementa el valor de *n* y el coseno no puede eliminar esta tendencia.

Apartado b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h_2[n]| = \sum_{n=-\infty}^{10}\left|3^n\right| = \sum_{n=-\infty}^{10} 3^n = \frac{0-3^{10}3}{1-3} = \frac{3^{11}}{2} \leq \infty$$

Observamos que la expresión da una constante (que aunque grande) lleva a cumplir que la expresión es menor que una constante y por tanto corresponde a un sistema Estable.

2.21 Calcule la convolución $y[n] = x[n] * h[n]$ de los siguientes pares de señales:

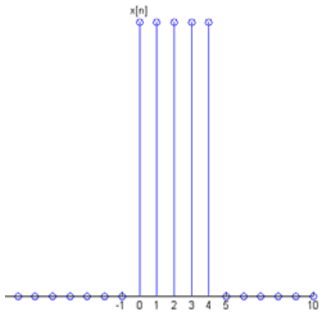
a) $\left.\begin{array}{l} x[n] = \alpha^n u[n] \\ h[n] = \beta^n u[n] \end{array}\right\} \alpha \neq \beta$

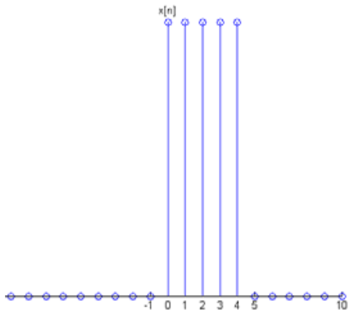
b) $x[n] = h[n] = \alpha^n u[n]$

c) $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-4]$

$h[n] = 4^n u[2-n]$

d) $x[n]$ y $h[n]$ **son como en la figura**





Resolución:

Apartado a)

$$y[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[k] u[n-k] = \left[u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \beta^{n-k} u[n-k] = \left[u[n-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k < n \end{cases} \right] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} = \beta^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{-k} =$$

$$= \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k = \beta^n \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}{1 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha}$$

Observad que esto es válido para $\alpha \neq \beta$ ya que tendríamos una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ y como $k \geq 0$ y $n - k \geq 0 \to n \geq k$, entonces la expresión de la convolución es válida para $n \geq k \geq 0 \to n \geq 0$. Siendo la convolución cero para las muestras negativas. De esta forma:

$$y[n] = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} u[n]$$

Apartado b)

Es el caso del apartado a) pero considerando $\alpha = \beta$

$$y[n] = x[n] * y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \alpha^{n-k} u[k] u[n-k] = \left[u[k] = \begin{cases} 1 & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \alpha^{n-k} u[n-k] = \left[u[n-k] = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k < n \end{cases} \right] = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \alpha^{n-k} = \alpha^n \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \alpha^{-k} =$$

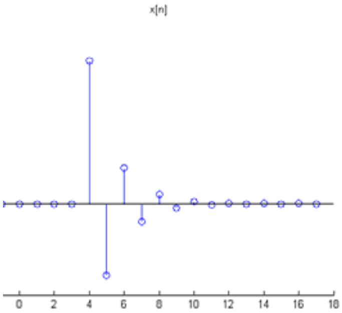
$$= \alpha^n \sum_{k=0}^{n} 1^k = \alpha^n (n+1)$$

Por tanto

$$y[n] = \alpha^n (n+1) u[n]$$

Apartado c)

Representemos ambas expresiones para su resolución gráfica



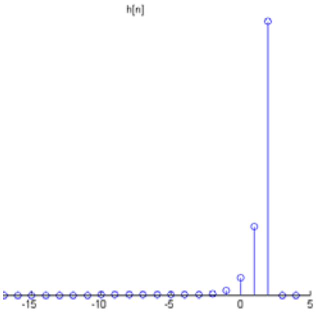


Figura a)

Dibujemos $h[n-k]$

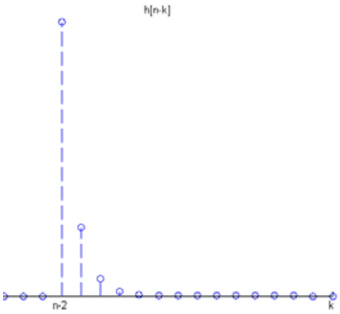


Figura b)

Si observamos tenemos dos zonas: (tener en cuenta figuras a) y b)

Zona 1: $n-2 \leq 4 \rightarrow n \leq 6$

$$y[n] = \sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^{n-k} = 4^n \sum_{k=4}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k = 4^n \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)^4}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^4 4^n$$

Zona 2: $n-2 > 4 \rightarrow n > 6$

$$y[n] = \sum_{k=n-2}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^k 4^{n-k} = 4^n \sum_{k=n-2}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k = 4^n \frac{\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-2}}{1+\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{8}\right)^n\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2} 4^n =$$

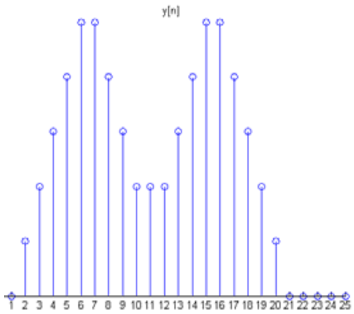
$$= \frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(-\frac{1}{8}\right)^{-2}$$

Apartado d)

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[0]h[n] + x[1]h[n-1] + x[2]h[n-2] + x[3]h[n-3] + x[4]h[n-4] =$$

$$= h[n] + h[n-1] + h[n-2] + h[n-3] + h[n-4]$$

El resultado es mostrado en la siguiente figura,



2.22. Para cada uno de los siguientes pares de formas de onda, use la integral de convolución para encontrar la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t)$ del sistema LTI cuya respuesta al impulso es $h(t)$. Bosqueje sus resultados.

a) $\left.\begin{array}{l} x(t) = e^{-\alpha t}u(t) \\ h(t) = e^{-\beta t}u(t) \end{array}\right\}$ (Obtenga el resultado con $\alpha \neq \beta$ y cuando $\alpha = \beta$)

b) $\begin{array}{l} x(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-5) \\ h(t) = e^{2t}u(1-t) \end{array}$

c) Ver figura a)

d) Ver figura b)

e) Ver figura c)

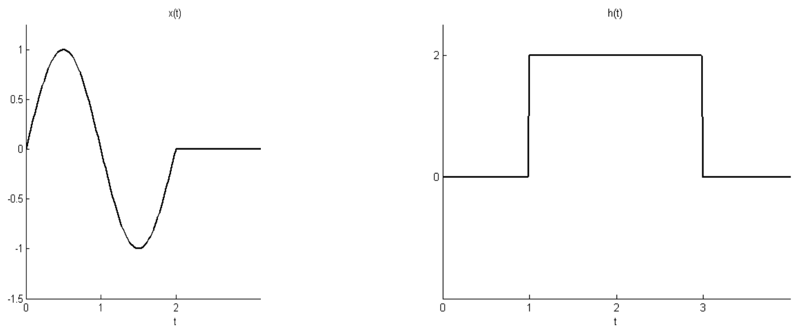


Figura a)

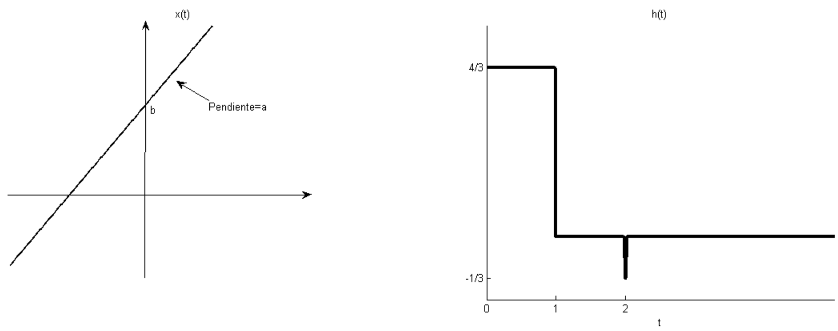


Figura b)

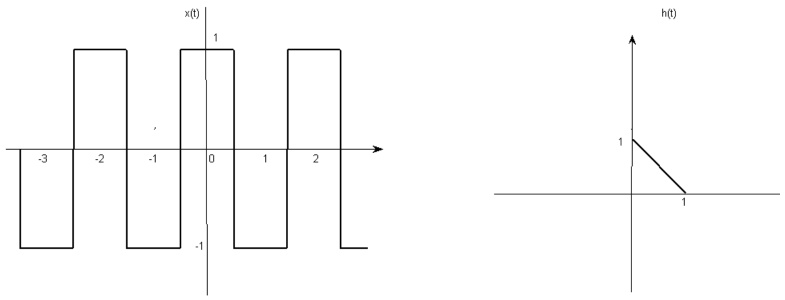


Figura c)

Resolución:

Apartado a)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}u(\tau)u(t-\tau)d\tau=\int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau \quad t\geq 0$$

Entonces,

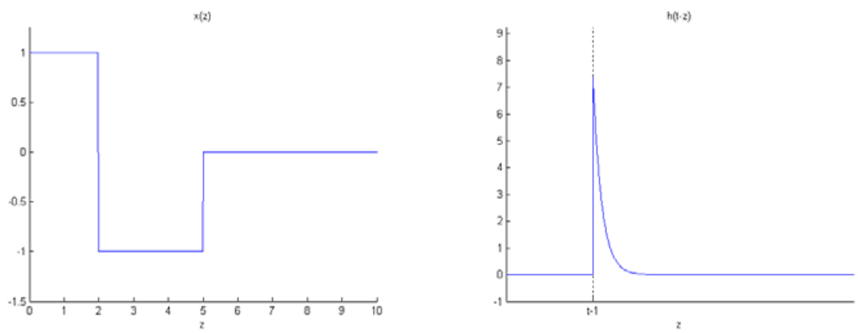
$$y(t)=\int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}e^{-\beta(t-\tau)}d\tau=e^{-\beta t}\int_{0}^{t} e^{-(\alpha-\beta)\tau}d\tau=e^{-\beta t}\left(\frac{e^{-(\alpha-\beta)\tau}}{\beta-\alpha}\right)_{0}^{t}=\frac{e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}\left(e^{-(\alpha-\beta)t}-1\right)=$$

$$=\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha} \quad t\geq 0$$

En el caso $\alpha=\beta$

$$y(t)=\int_{0}^{t} e^{-\alpha\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau=e^{-\alpha t}\int_{0}^{t} d\tau=e^{-\alpha t}(\tau)_{0}^{t}=te^{-\alpha t} \quad t\geq 0$$

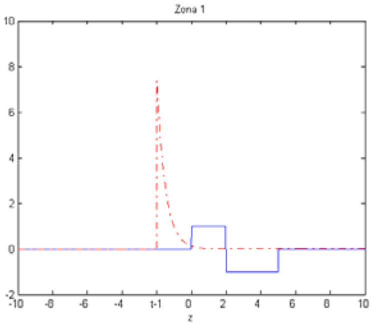
Apartado b)



Zona 1:

$t-1\leq 0 \rightarrow t\leq 1$ (ver figura zona 1)

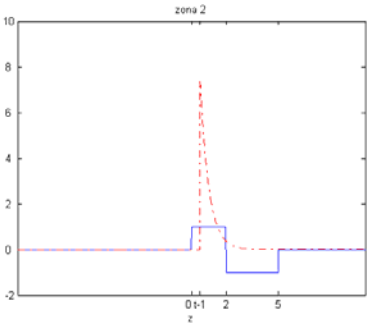
$$y(t)=\int_{0}^{2} e^{2(t-\tau)}d\tau-\int_{2}^{5} e^{2(t-\tau)}d\tau=\frac{1}{2}\left[e^{2t}-2e^{2(t-2)}+e^{2(t-5)}\right]$$



Zona 2:

$t \geq 1$ y $t - 1 \leq 2 \rightarrow t \leq 3$ (Ver figura zona 2)

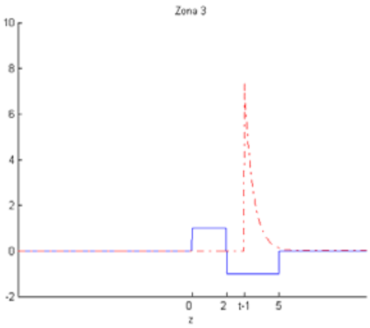
$$y(t) = \int_{t-1}^{2} e^{2(t-\tau)} d\tau - \int_{2}^{5} e^{2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\left[e^{2} + 2e^{2(t-5)} - 2e^{2(t-2)}\right]$$



Zona 3: (ver figura zona 3)

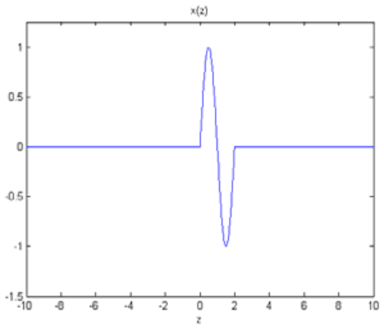
$t \leq 2$ y $t - 1 \leq 5 \rightarrow t \leq 6$

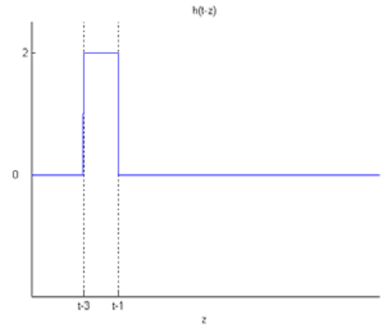
$$y(t) = -\int_{t-1}^{5} e^{2(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{2}\left[e^{2(t-5)} - e^{2}\right]$$



Zona 4: $t \geq 5 \rightarrow y(t) = 0$

Apartado c)





Analicemos las diferentes zonas: (tenemos que presente que el ancho del pulso y del trozo senoidal es el mismo e igual a 2).

Zona 1:

$t-1 \le 0 \rightarrow t \le 1 \rightarrow y(t)=0$ Aún no hay salida

Zona 2: $t \le 1$ y $t-1 \le 2 \rightarrow t \le 3$

$$y(t)=\int_{0}^{t-1} 2sen(\pi\tau)d\tau = 2\left(\frac{-cos(\pi\tau)}{\pi}\right)_{0}^{t-1} = \frac{2}{\pi}\left[1-cos(\pi(t-1))\right]$$

Zona 3: $t \ge 3$ y $t-3 \le 2 \rightarrow t \le 5$

$$y(t)=\int_{t-3}^{2} 2sen(\pi\tau)d\tau = 2\left(\frac{-cos(\pi\tau)}{\pi}\right)_{t-3}^{2} = \frac{2}{\pi}\left[cos(\pi(t-3))-1\right]$$

Zona 4 $t-3>2 \rightarrow t>5 \rightarrow y(t)=0$

Apartado d) Al tener una delta procedemos del siguiente modo:

$$h(t)=h_1(t)-\frac{1}{3}\delta(t-2) \text{ con } h_1(t)=\begin{cases} \frac{4}{3} & 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{por otro lado} \end{cases}$$

Con lo que:

$$y(t)=x(t)*h(t)=\left[h_1(t)*x(t)\right]-\frac{1}{3}x(t-2).$$

$$h_1(t)*x(t)=\int_{t-1}^{t}\frac{4}{3}(a\tau+b)d\tau=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{2}a(t-1)^2+bt-b(t-1)\right]$$

Por lo tanto,

$$y(t)=\frac{4}{3}\left[\frac{1}{2}at^2-\frac{1}{2}a(t-1)^2+bt-b(t-1)\right]-\frac{1}{3}\left[a(t-2)+b\right]=$$
$$=at+b=x(t)$$

Apartado e)

Al ser $x(t)$ periódica implica $y(t)$ periódica del mismo período, por ello determinemos un período

Al invertir y desplazar la respuesta impulsional tenemos que sus límites son *t*-1 y *t*.

$$h(t)=-t+1 \quad 0 \le t \le 1 \rightarrow h(t-\tau)=-(t-\tau)+1=-t+\tau+1 \quad 0 \le t-\tau \le 1 \quad t-1 \le \tau \le t$$

Zona 1: $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$

$$y(t) = \int_{t-1}^{-1/2} (t - z - 1)\, d\tau + \int_{-1/2}^{t} (-t + z + 1)\, d\tau = \frac{1}{4} + t - t^2$$

Zona 2: $\frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{2}$

$$y(t) = \int_{t-1}^{1/2} (t - z - 1)\, d\tau + \int_{1/2}^{t} (-t + z + 1)\, d\tau = t^2 - 3t + \frac{7}{4}$$

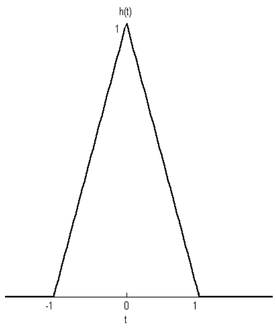
Siendo periódica de período 2.

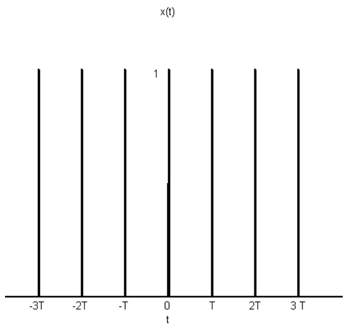
2.23 Sea $h(t)$ el pulso triangular mostrado en la figura a) y $x(t)$ el tren de impulsos mostrado en la figura b). Esto es:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

Determine y trace $y(t) = x(t) * h(t)$ para los siguientes valores de *T*.

a) $T = 4$	**b)** $T = 2$	**c)** $T = 3/2$	**d)** $T = 1$

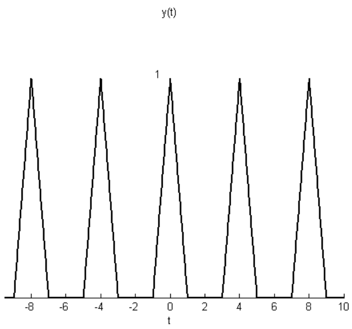




Resolución:

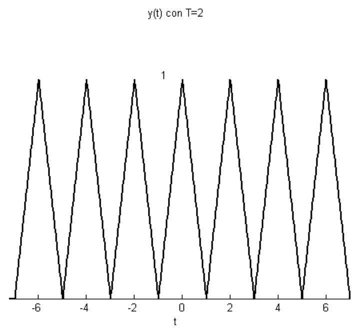
Al convolucionar con una delta la señal se desplaza entorno a la posición de la delta, en este caso al ser un tren, tendremos que se desplazara a cada una de las deltas.

Apartado a) Siendo el resultado gráfico (observamos no hay solape, los triángulos se siguen viendo)

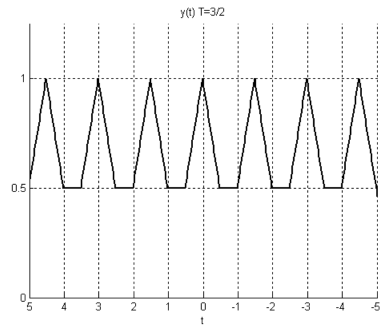


Apartado b)

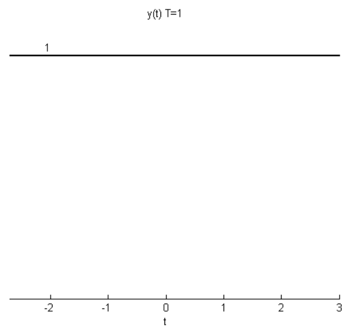
Se observa que es la separación mínima entre las deltas, para que no se solapen los triángulos.



Apartado c)



Apartado d)



Se obtiene la recta constante de amplitud 1.

2.28 A continuación mostramos las respuestas al impulso de sistemas LTI discretos. Determine si cada sistema es causal y/o estable. Justifique sus respuestas.

a) $h[n] = \left(\frac{1}{5}\right)^n u[n]$

b) $h[n] = (0.8)^n u[n+2]$

c) $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n]$

d) $h[n] = (5)^n u[3-n]$

e) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[n-1]$

f) $h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] + (1.01)^n u[1-n]$

g) $h[n] = n\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$

Resolución

Para ser causal la respuesta impulsional debe sólo existir para $n \geq 0$ y para ser estable la suma del módulo de la respuesta impulsional debe converger.

Apartado a)

Causal porque $h[n]=0$ para $n<0$.

Estabilidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u[n]\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}=\frac{1-0}{1-\frac{1}{5}}=\frac{5}{4}<\infty$$ por tanto ESTABLE.

Apartado b)

No causal la respuesta impulsional tiene valor distinto de cero en las muestras -1 y -2.

Estabilidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|(0.8)^{n}u[n+2]\right|=\sum_{n=-2}^{\infty}(0.8)^{n}=\frac{(0.8)^{-2}-0}{1-0.8}=\frac{(0.8)^{-2}}{0.2}=\frac{125}{16}$$

por tanto ESTABLE.

Apartado c)

No causal.

Estabilidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[-n]\right|=\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\infty$$ NO ESTABLE.

Apartado d)

No causal, existe para muestras negativas.

Estabilidad

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|(5)^{n}u[3-n]\right|=\sum_{n=-\infty}^{3}(5)^{n}=\frac{0-5^{3}5}{1-5}=\frac{625}{4}<\infty$$ por tanto ESTABLE.

Apartado e)

Causal

No estable pues el segundo término crece cuando $n\to\infty$

Apartado f)

No causal

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+(1.01)^{n}u(1-n)\right|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+\sum_{n=-\infty}^{1}(1.01)^{n}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}+\frac{0-(1.01)^{2}}{1-1.01}\leq\infty$$

Si estable

Apartado g)

Causal

Estabilidad

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=1<\infty$$ Estable.

2.29 A continuación ofrecemos las respuestas al impulso de sistemas LTI continuos. Determine si cada sistema es causal y o estable. Justifique sus respuestas.

a) $h(t)=e^{-4t}u(t-2)$

e) $h(t)=e^{-6|t|}$

b) $h(t)=e^{-6t}u(3-t)$

c) $h(t)=e^{-2t}u(t+50)$

d) $h(t)=e^{2t}u(-1-t)$

f) $h(t)=te^{-t}u(t)$

g) $h(t)=\left(2e^{-t}-e^{(t-100)/100}\right)u(t)$

Resolución

Apartado a)

Causal, $h(t)$ no toma valores en $t<0$

Estabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{2}^{\infty}\left|e^{-4t}\right|dt = \int_{2}^{\infty}e^{-4t}dt = \left(\frac{e^{-4t}}{-4}\right)_{2}^{\infty} = \frac{0-e^{-8}}{-4} = \frac{e^{-8}}{4}$$

Converge y por tanto es estable.

Apartado b)

No Causal, $h(t)$ toma valores en $t<0$

Estabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{-\infty}^{3}\left|e^{-6t}\right|dt = \int_{-\infty}^{3}e^{-6t}dt = \left(\frac{e^{-6t}}{-6}\right)_{-\infty}^{3} = \frac{e^{-18}-\infty}{-6} = \infty$$

No converge y por tanto es no estable.

Apartado c)

No Causal, $h(t)$ toma valores en $t<0$

Estabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{-50}^{\infty}\left|e^{-2t}\right|dt = \int_{-50}^{\infty}e^{-2t}dt = \left(\frac{e^{-2t}}{-2}\right)_{-50}^{\infty} = \frac{e^{100}}{2}$$

Converge y por tanto es estable.

Apartado d)

No Causal, $h(t)$ toma valores en $t<0$

Estabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{-\infty}^{-1}\left|e^{2t}\right|dt = \int_{-\infty}^{-1}e^{2t}dt = \left(\frac{e^{2t}}{2}\right)_{-\infty}^{-1} = \frac{e^{-2}}{2}$$

Converge y por tanto es estable.

Apartado e)

No Causal, $h(t)$ toma valores en $t<0$

Estabilidad

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left|e^{-6|t|}\right|dt = \int_{-\infty}^{0}e^{6t}dt + \int_{0}^{\infty}e^{-6t}dt = \left(\frac{e^{6t}}{6}\right)_{-\infty}^{0} + \left(\frac{e^{-6t}}{-6}\right)_{0}^{\infty} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

Converge y por tanto es estable.